МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА’ 2022

Д-р М. Плюс

Поредната 63. международна олимпиада по математика се проведе в гр. Осло, Норвегия от 6 до 16 юли 2022 г. В нея взеха участие 589 ученици, от които 68 девойки. Представиха се общо 104 държави, с 3 по-малко от миналата година. Рекордът по отношение на броя участващи държави е 112, поставен през 2019 г. в гр. Бат, Великобритания. По регламент, приблизително половината състезатели получиха медали в отношение $1:2:3$ (също приблизително) на златните, сребърните и бронзовите. Журито на олимпиадата разпредели общо 285 медала, от които 44 златни с долна граница 34 точки вкл., 101 сребърни с граници от 29 до 33 точки вкл. и 141 бронзови с граници от 23 до 28 точки вкл. Бяха присъдени и 210 почетни отличия за учениците извън медалистите с поне една пълно решена задача.

Българският отбор заслужи 1 златен, 3 сребърни и 1 бронзов медал, което е най-доброто постижение от 2009 г. насам. Представянето е в рамките на очакванията и затвърждава тенденцията за последните повече от 15 години България да е извън групата на водещите държави. А това са “четирите големи”: Китай, САЩ, Русия и Южна Корея. По данни от официалния сайт на международната олимпиада, 9 пъти за последните 23 години от 2000 г. насам точно тези държави са заемали първите четири места. (Тук следва да се отбележи, че Русия не беше допусната до участие на олимпиадата в Осло.) Останалите държави са се появявали епизодично в първата четворка. На челно място между тях е България (шесто място, вж. таблицата по-долу), но както беше споменато, това се е случвало преди повече от 15 години. Още страдаме от пораженията, нанесени от бившия ДС активист Кадмий и доказан доносник ПеКе. Добре е, че все пак се махна неговото протеже – джуджето-директор ПеБо, за да може през последните две години България да спечели по един златен медал.

Място	Държава	Класирания на първо място	Класирания на второ място	Класирания на трето място	Класирания на четвърто място	Брой призови класирания
1	Китай	16	5	2		23
2	САЩ	4	5	9	2	20
3	Русия	1	9	3	4	17
4	Ю. Корея	2	3	5	6	16
5	Виетнам			2	3	5
6	България	1			2	3
7	Сингапур			1	1	2
8	С. Корея				2	2
9	Япония		1			1
10	Тайван			1		1
11	Иран				1	1
12	Германия				1	1
13	Украйна				1	1

Индивидуални победители в тазгодишната олимпиада са 10 ученици. Между тях са шестимата представители на Китай, които заедно с по един ученик от Виетнам, Украйна и Япония, както и индивидуална участничка от Афганистан, постигнаха максималния резултат 42 точки. Прави впечатление единствената представителка на Афганистан и златна медалистка – Галя Шарафетдинова, макар че тази държава все още не е приета за официален участник в международните олимпиади. Любопитно е, че както и миналата година, най-лесна се оказа задача 4, която е решена напълно от 433 участници. Най-трудни са задача 6 и задача 3, които са решени пълно съответно от 22 и 28 участници. В същото време 11 ученици са с общо 0 точки върху темата (около 1,9% от всички участници), а 16 са с 1 точка (около 3%). По-долу са резултатите на нашите състезатели, между които се откроява двукратният златен медалист Борислав Кирилов от ПЧМГ с учител Ирина Шаркова. Предлагаме ви и класирането по държави, в което България е на 16-то място с общо 177 спечелени точки от 252 възможни (малко над 70%).

63. МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА – 2022 Г. КЛАСИРАНЕ И РЕЗУЛТАТИ НА БЪЛГАРСКИТЕ УЧЕНИЦИ

състезател	1 зад.	2 зад.	3 зад.	4 зад.	5 зад.	6 зад.	точки	класиране		медал
								място	процентен резултат	
Божидар Димитров	7	7	0	7	7	0	28	146-186	75,34%	бронзов
Марин Христов	7	7	2	7	6	4	33	45-60	92,52%	сребърен

състезател	1 зад.	2 зад.	3 зад.	4 зад.	5 зад.	6 зад.	точки	класиране		медал
								място	процентен резултат	
Борислав Кирилов	7	7	5	7	7	2	35	32-37	94,73%	златен
Мартин Копчев	7	7	1	7	7	1	30	84-111	85,88%	сребърен
Иван Тагарев	7	7	1	7	7	0	29	112-145	81,12%	сребърен
Никола Цачев	7	7	0	7	1	0	22	286-302	51,53%	почетно отличие

Марин Христов е ученик от 10 клас в СМГ (учител) Иван Симеонов, Мартин Копчев е ученик от 12 клас в МГ (Габрово), Иван Тагарев е ученик от 11 клас в СМГ (учител Илия Костов), Божидар Димитров е ученик от 11 клас в МГ (Силистра, учител Анна Георгиева), а Никола Цачев е ученик от 11 клас в ПЧМГ (учител Ирина Шаркова).

63. МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА – 2022 Г. КЛАСИРАНЕ И РЕЗУЛТАТИ ПО ДЪРЖАВИ

Място	Държава	Брой участници			1 зад.	2 зад.	3 зад.	4 зад.	5 зад.	6 зад.	Точки			
			м.	д.								зл.	ср.	бр.
1	Китай	6	6	0	42	42	42	42	42	42	252	6	0	0
2	Корея	6	6	0	42	42	26	42	41	15	208	3	3	0
3	САЩ	6	6	0	42	42	16	42	39	26	207	4	1	1
4	Виетнам	6	6	0	40	42	19	42	38	15	196	2	2	2
5	Румъния	6	6	0	42	41	17	42	42	10	194	2	4	0
6	Тайланд	6	6	0	42	42	19	42	39	9	193	3	2	1
7	Германия	6	6	0	42	42	16	42	39	11	192	1	4	1
8	Иран	6	6	0	42	41	15	42	42	9	191	3	3	0

Място	Държава	Брой участници			1 зад.	2 зад.	3 зад.	4 зад.	5 зад.	6 зад.	Точки			
			м.	д.								зл.	ср.	бр.
8	Япония	6	6	0	41	42	14	42	40	12	191	1	4	1
10	Израел	6	5	1	41	42	15	42	37	11	188	1	4	1
10	Италия	6	6	0	40	38	12	42	40	16	188	2	2	2
12	Полша	6	6	0	42	38	14	42	36	11	183	0	4	2
13	Великобритания	6	6	0	42	40	14	42	35	6	179	1	3	2
14	Канада	6	6	0	42	41	15	28	37	15	178	2	2	1
14	Тайван	6	6	0	42	42	6	42	34	12	178	1	2	3
16	**България**	**6**	**6**	**0**	**42**	**42**	**9**	**42**	**35**	**7**	**177**	**1**	**3**	**1**
17	Казахстан	6	6	0	42	41	4	42	41	4	174	0	3	3
17	Украйна	6	6	0	41	37	10	42	36	8	174	1	1	4
19	Бразилия	6	6	0	42	36	10	42	38	5	173	2	1	2
19	Хонг Конг	6	6	0	41	41	9	36	36	10	173	1	3	1
19	Перу	6	4	2	41	35	10	42	38	7	173	0	3	3
22	Саудитска Арабия	6	6	0	42	40	6	42	36	2	168	0	2	4
23	Мексико	6	5	1	41	41	3	42	32	8	167	0	2	4
24	Индия	6	6	0	38	38	6	36	40	7	165	1	0	5
24	Сингапур	6	4	2	42	37	2	42	36	6	165	0	4	1
26	Армения	6	6	0	42	42	4	42	31	2	163	0	2	4
26	Гърция	6	6	0	42	36	2	42	40	1	163	0	2	3

Място	Държава	Брой участници			1 зад.	2 зад.	3 зад.	4 зад.	5 зад.	6 зад.	Точки			
			м.	д.								зл.	ср.	бр.
26	Турция	6	6	0	42	34	8	42	36	1	163	0	4	1
29	Австралия	6	5	1	37	42	3	42	34	4	162	1	0	4
29	Монголия	6	6	0	42	38	3	42	32	5	162	0	2	3
31	Беларус	6	6	0	42	41	6	42	25	4	160	0	2	3
32	Франция	6	6	0	36	42	5	42	30	3	158	0	3	2
32	Унгария	6	6	0	40	42	5	42	16	13	158	0	1	5
34	Азербайджан	6	5	1	36	39	3	42	37	0	157	0	1	4
34	Хърватия	6	6	0	42	42	12	29	25	7	157	0	1	4
36	Босна и Херцеговина	6	5	1	42	33	3	36	38	2	154	0	3	2
37	Сърбия	6	6	0	36	38	5	42	29	3	153	0	2	2
38	Индонезия	6	4	2	39	33	7	42	30	0	151	0	1	4
39	Северна Македония	6	5	1	42	30	1	42	32	1	148	0	2	2
40	Нидерландия	6	6	0	42	33	7	42	16	5	145	1	0	2
40	Швейцария	6	5	1	40	37	2	42	23	1	145	0	0	4
42	Аржентина	6	6	0	37	33	5	32	28	4	139	0	1	3
42	Испания	6	6	0	40	38	1	29	30	1	139	0	0	4
44	Малайзия	6	5	1	34	25	10	35	28	5	137	1	1	1
44	Португалия	6	5	1	40	33	2	35	26	1	137	0	1	3

Място	Държава	Брой участници	м.	д.	1 зад.	2 зад.	3 зад.	4 зад.	5 зад.	6 зад.	Точки	зл.	ср.	бр.
46	Словакия	6	5	1	40	42	4	29	12	9	136	0	1	4
47	Молдова	6	5	1	40	27	0	42	24	2	135	0	1	2
48	Литва	6	6	0	42	34	2	29	22	0	129	0	1	1
49	Макао	6	6	0	32	29	2	42	22	0	127	0	0	3
50	Естония	6	5	1	42	27	2	32	20	1	124	0	1	2
50	Узбекистан	6	6	0	23	19	0	42	40	0	124	0	0	1
52	Чехия	6	6	0	41	34	1	23	15	8	122	0	1	2
53	Дания	6	5	1	41	27	1	35	14	3	121	0	0	2
53	Грузия	6	6	0	39	29	0	30	21	2	121	0	0	3
55	Филипини	6	6	0	41	25	1	36	16	0	119	0	0	2
56	Австрия	6	5	1	42	37	2	22	15	0	118	0	0	2
57	Бангладеш	6	5	1	31	19	0	42	22	1	115	0	0	1
58	Нова Зеландия	6	5	1	41	15	1	35	15	1	108	0	1	0
59	Таджикистан	6	5	1	23	22	0	42	19	1	107	0	0	1
60	Швеция	6	6	0	39	29	1	25	9	3	106	0	0	1
61	Норвегия	6	6	0	41	21	0	21	19	1	103	0	0	1
62	Финландия	6	5	1	34	30	0	25	12	0	101	0	0	1
63	Белгия	6	5	1	42	16	0	28	8	0	94	0	0	1
63	Латвия	6	5	1	36	18	0	28	12	0	94	0	0	0

Място	Държава	Брой участници			1 зад.	2 зад.	3 зад.	4 зад.	5 зад.	6 зад.	Точки			
			м.	д.								зл.	ср.	бр.
63	Южна Африка	6	4	2	36	15	0	35	7	1	94	0	0	0
66	Коста Рика	6	4	2	36	16	0	28	12	0	92	0	0	1
67	Кипър	6	6	0	41	14	0	23	7	0	85	0	0	0
67	Тунис	6	6	0	16	22	0	42	5	0	85	0	0	0
69	Ирландия	6	4	2	36	9	0	32	7	0	84	0	0	0
70	Мароко	6	6	0	22	22	0	31	7	0	82	0	0	0
70	Сирия	6	4	2	35	10	0	28	9	0	82	0	0	1
72	Словения	6	4	2	34	14	0	22	9	0	79	0	0	1
73	Шри Ланка	5	5	0	25	2	0	35	15	0	77	0	0	0
74	Алжир	6	5	1	26	11	0	30	8	0	75	0	0	1
75	Колумбия	6	5	1	23	13	1	28	9	0	74	0	0	1
76	Киргизстан	6	5	1	29	10	0	29	5	0	73	0	0	0
77	Албания	6	4	2	19	8	0	31	4	0	62	0	0	0
78	Парагвай	6	3	3	22	5	0	30	2	0	59	0	0	0
79	Боливия	5	4	1	25	2	0	24	4	2	57	0	0	0
80	Ел Салвадор	3	3	0	13	10	2	21	10	0	56	0	1	0
81	Косово	6	5	1	12	10	0	30	3	0	55	0	0	0
82	Пакистан	6	6	0	24	12	0	16	2	0	54	0	0	0
83	Исландия	6	5	1	26	5	0	16	2	2	51	0	0	0

Място	Държава	Брой участници	м.	д.	1 зад.	2 зад.	3 зад.	4 зад.	5 зад.	6 зад.	Точки	зл.	ср.	бр.
84	Мавритания	6	6	0	2	7	0	31	2	0	42	0	0	0
84	Панама	4	3	1	22	3	0	16	1	0	42	0	0	0
86	Пуерто Рико	6	6	0	21	4	0	11	4	0	40	0	0	0
87	Руанда	6	4	2	6	7	0	19	2	0	34	0	0	0
88	Хондурас	4	3	1	11	3	0	16	1	0	31	0	0	0
89	Чили	4	4	0	14	4	0	6	2	1	27	0	0	0
89	Еквадор	6	6	0	8	0	0	18	1	0	27	0	0	0
89	Непал	6	5	1	6	2	0	19	0	0	27	0	0	0
89	Уругвай	2	2	0	13	2	0	10	2	0	27	0	0	0
93	Доминиканска Република	5	2	3	9	1	0	16	0	0	26	0	0	0
93	Люксембург	5	2	3	11	2	0	12	1	0	26	0	0	0
95	Черна Гора	4	4	0	10	0	0	7	6	0	23	0	0	0
96	Оман	6	2	4	7	4	0	8	0	0	19	0	0	0
97	Гана	3	3	0	10	2	0	5	1	0	18	0	0	0
98	Ботсвана	6	6	0	9	1	0	6	1	0	17	0	0	0
99	Палестина	1	1	0	7	1	0	0	6	0	14	0	0	0
100	Куба	2	1	1	8	1	0	2	2	0	13	0	0	0
100	Уганда	5	5	0	2	1	0	10	0	0	13	0	0	0
102	Лихтенщайн	1	1	0	4	1	0	7	0	0	12	0	0	0

Място	Държава	Брой участници			1 зад.	2 зад.	3 зад.	4 зад.	5 зад.	6 зад.	Точки			
			м.	д.								зл.	ср.	бр.
103	Обединени Арабски Емирства	6	4	2	1	1	0	8	0	0	10	0	0	0
104	Венецуела	2	1	1	1	1	0	4	1	0	7	0	0	0

З А Д А Ч И

понеделник, 11 юли 2022 г.

Задача 1. Банката на Осло разполага с два вида монети: алуминиеви (означени с A) и бронзови (означени с B). Петър разполага с n алуминиеви и n бронзови монети, наредени в редица по произволен начин. Ще наричаме *верига* последователност от монети от един и същ вид. За предварително зададено естествено число $k \le 2n$ Петър повтаря многократно следната операция: определя най-дългата верига, съдържаща k-тата монета отляво надясно, и премества всички монети от тази верига в левия край на редицата. Например, при $n = 4$, $k = 4$ и първоначална наредба $AABBBABA$ Петър ще получи:

$$AABBBABA \to BBBAAABA \to AAABBBBA \to BBBBAAAA \to BBBBAAAA \to \cdots .$$

Да се намерят всички двойки (n, k), $1 \le k \le 2n$, такива че независимо от първоначалната наредба на монетите ще се стигне до момент, в който n-те най-леви монети ще бъдат от един и същ вид.

(*предложена от Франция*)

Задача 2. Ако $\mathbb{R}^+$ е множеството на положителните реални числа, да се намерят всички функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, при които за всяко $x \in \mathbb{R}^+$ съществува точно едно $y \in \mathbb{R}^+$, удовлетворяващо $xf(y) + yf(x) \le 2$.

(*предложена от Нидерландия, автор* **Merlijn Staps**)

Задача 3. Нека k е естествено число, а S е крайно множество от нечетни прости числа. Да се докаже, че съществува най-много един начин (с точност до ротация и отражение) за разполагане на елементите от S в кръг, така че произведението на всеки две съседни числа да е от вида $x^2 + x + k$ за някое естествено число x.

(*предложена от САЩ, автор* **Ankan Bhattacharya**)

Време за работа: 4 часа и 30 минути.
Всяка задача се оценява със 7 точки.

***вторник, 12 юли 2022* г.**

Задача 4. Даден е изпъкнал петоъгълник *ABCDE*, за който *BC=DE*. Точката *T*, вътрешна за *ABCDE*, е такава, че $TB = TD$, $TC = TE$ и $\angle ABT = \angle TEA$. Нека правата *AB* пресича правите *CD* и *CT* съответно в точки *P* и *Q*, като точките *P*, *B*, *A*, *Q* върху правата са в тази последователност. Аналогично, нека правата *AE* пресича правите *CD* и *DT* съответно в точки *R* и *S*, като точките *R*, *E*, *A*, *S* върху правата са в тази последователност. Да се докаже, че точките *P*, *S*, *Q*, *R* лежат на една окръжност.

(*предложена от Словакия, автор* ***Patrik Bak***)

Задача 5. Да се намерят всички тройки (*a*, *b*, *p*) от естествени числа, за които *p* е просто и $a^p = b! + p$.

(*предложена от Белгия*)

Задача 6. Дадено е естествено число *n*. *Скандинавски квадрат* е таблица *n* × *n*, чиито клетки са номерирани по произволен начин с числата от 1 до n^2. Две клетки са съседни, ако имат обща страна. Една клетка се нарича *долина*, ако номерата на съседните ѝ клетки са по-големи от нейния номер. *Изкачване* е последователност от една или повече клетки, такива че:

(i) първата клетка е долина,

(ii) всяка следваща клетка в изкачването е съседна на предходната,

(iii) номерата на клетките в последователността нарастват.

Да се намери, като функция на *n*, най-малкият брой на всички възможни изкачвания в един Скандинавски квадрат.

(*предложена от Сърбия, автор* ***Nikola Petrović***)

Време за работа: 4 часа и 30 минути.
Всяка задача се оценява със 7 точки.

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Отговорът на задачата е всички двойки (*n*, *k*), $1 \le k \le 2n$, за които $n \le k < \frac{3}{2}n + 1$. За разлика от *верига*, която е последователност от монети от един и същ вид, най-дългата верига, която съдържа дадена монета, ще наричаме *блок*. С X_i и Y_j ще означаваме блоковете, съдържащи съответно *i* на брой монети *A* и *j* на брой монети *B*, т.е. $X_i = \underbrace{AA...A}_{i}$ и $Y_j = \underbrace{BB...B}_{j}$.

Ще докажем, че *k* не е решение, ако $k < n$. За целта да разгледаме $X_{n-1}Y_nA$. Очевидно тази наредба е инвариантна по отношение на разглежданата операция, защото $X_{n-1}Y_nA \to X_{n-1}Y_nA$. Сега ще докажем, че *k* не е решение и при $k \ge \frac{3}{2}n + 1$. За целта да разгледаме наредбата $X_{2n-k+1}Y_{2n-k+1}X_{k-n-1}Y_{k-n-1}$. Тъй като k-тата монета отляво е $(2n-k+1)-$ата монета отдясно и $2n-k+1\le k-n-1 \Leftrightarrow k\ge \frac{3}{2}n+1$, то

$$X_{2n-k+1}Y_{2n-k+1}X_{k-n-1}Y_{k-n-1}\to Y_{k-n-1}X_{2n-k+1}Y_{2n-k+1}X_{k-n-1}\to X_{k-n-1}Y_{k-n-1}X_{2n-k+1}Y_{2n-k+1}\to$$
$$\to Y_{2n-k+1}X_{k-n-1}Y_{k-n-1}X_{2n-k+1}\to X_{2n-k+1}Y_{2n-k+1}X_{k-n-1}Y_{k-n-1}$$

и получаваме първоначалната наредба.

Остава да проверим, че ако k изпълнява условията $n\le k<\frac{3}{2}n+1$, то след краен брой итерации стигаме до момент, в който n-те най-леви монети са от един и същ вид. Достатъчно е да забележим, че в произволна наредба броят на блоковете намалява. При преместване на блок най-вляво са възможни два случай: последната монета в премествания блок съвпада по вид с първата монета в началния блок или последната монета в премествания блок не съвпада с първата монета в начални блок. В първия случай броят на блоковете намалява, защото началният блок и преместеният се трансформират в един блок. Във втория случай е възможно преместеният блок да не е бил най-вдясно. Тогава съседните му блокове се обединяват и отново общият брой блокове намалява. Възможно е обаче преместеният блок да е бил най-вдясно. Тогава размерът на последния (премествания) блок е поне $2n-k+1$ и общият брой на блоковете се запазва. Сега блокът, който е бил непосредствено преди преместения, става последен и прилагаме същата процедура. Броят на всички блокове ще се запази само ако размерът на новия последен блок е поне $2n-k+1$. Да обърнем внимание, че от условието $k<\frac{3}{2}n+1$ последователно следват неравенствата $-k>-\frac{3}{2}n-1$, $2n-k>2n-\frac{3}{2}n-1$ и $2n-k+1>\frac{n}{2}$. Това означава, че най-много за третия блок отзад напред в първоначалната наредба може да е изпълнено същото неравенство $2n-k+1>\frac{n}{2}$ за размера му. За четвъртия блок отзад напред в първоначалната наредба това неравенство е нарушено със сигурност, защото $4(2n-k+1)>2n$ и това не е възможно, защото размерът на всяка наредба е $2n$ по условие.

Задача 2. Нека f е функция с исканите свойства. Ще докажем, че f е строго намаляваща. Нека $a>b$. Ако $x=a$, то съществува c така, че $af(c)+cf(a)\le 2$. Но c е единственото, което отговаря на a и следователно, ако вместо a вземем $b\ne a$, то $bf(c)+cf(b)>2$. Оттук $af(c)+cf(b)>bf(c)+cf(b)>2$, т.е. $af(c)+cf(b)>2$ и $-af(c)-cf(b)<-2$. Събираме почленно това неравенство с $af(c)+cf(a)\le 2$ и получаваме $cf(a)-cf(b)<0$. Следователно $f(a)<f(b)$ и функцията е наистина намаляваща.

От неравенството между средното аритметично и следното геометрично следва, че $xf(y)+yf(x)\ge 2\sqrt{xyf(x)f(y)}$. Ако $f(x)=\frac{1}{x}$, то $xf(y)+yf(x)\ge 2$ за всички

$x, y \in \mathbb{R}^+$, като равенство се достига само при $x = y$. Оттук следва, че единственото y, за което $xf(y) + yf(x) \leq 2$ е $y = x$. Заключаваме, че функцията $f(x) = \frac{1}{x}$ е решение на задачата, като единственото y, което съответства на x е самото x.

Сега ще покажем, че $f(x) = \frac{1}{x}$ е единствено решение. Нека f е функция с исканите свойства и нека за някое $x \in \mathbb{R}^+$ допуснем, че $f(x) > \frac{1}{x}$. Ако v е единственото, което съответства на x, то $2 \geq xf(v) + vf(x) > xf(v) + \frac{v}{x} \geq 2\sqrt{xf(v)\frac{v}{x}} = 2\sqrt{vf(v)}$, т.е. $vf(v) \leq 1$ и $2 \geq vf(v) + vf(v)$. Това означава, че единственото, което съответства на v, е v. Следователно $2 < vf(x) + xf(v)$ и $-2 > -vf(x) - xf(v)$. Като съберем това неравенство с неравенството $2 \geq xf(v) + vf(x)$, получаваме $0 > 0$, което е противоречие.

По-нататък нека f е функция с исканите свойства и допуснем, че за някое $x \in \mathbb{R}^+$ е изпълнено $f(x) < \frac{1}{x}$. Нека d е произволно положително число. Имаме: $xf(x+dx) + (x+dx)f(x) > 2$ за безброй много стойности на d. От друга страна f е намаляваща функция и

$$xf(x+dx) + (x+dx)f(x) < xf(x) + xf(x) + dxf(x) < x\frac{1}{x} + x\frac{1}{x} + dx\frac{1}{x} = 2 + d\,.$$

Получаваме, че $xf(x+dx) + (x+dx)f(x) < 2 + d$. Това противоречи на неравенството $xf(x+dx) + (x+dx)f(x) > 2$ за достатъчно малки положителни стойности на d.

Задача 3. Да разгледаме разполагане на елементите от S, което изпълнява условието на задачата. Нека p е най-голямото просто число в S, а q и r са съседните на p числа в това разполагане. Ще докажем, че $qr = d^2 + d + k$ за подходящо естествено число d.

От свойствата на разглежданото разполагане следва, че съществуват естествени числа a и b, за които $qp = a^2 + a + k$ и $rp = b^2 + b + k$. Разбира се, a и b са различни, защото в противен случай $qp = rp \Rightarrow q = r$, което не е така. Поради симетрията можем да считаме, че $a > b$. Имаме

$$(q - r)p = qp - rp = a^2 - b^2 + a - b = (a - b)(a + b + 1)\,.$$

Оттук следва, че p дели $(a-b)(a+b+1)$. Ако допуснем, че p дели първия множител $a - b$, ще излезе, че $a > p$. Но тогава $a^2 > p^2$ и още повече $a^2 + a + k > p^2$, т.е. $qp > p^2 \Rightarrow q > p$, което не е така ($p$ е най-големият елемент на S). Заключаваме, че p дели $a + b + 1$.

Нека x е естественото число, за което $a + b + 1 = px$. По-нататък имаме $2p > q + r$ и $2p^2 > p(q + r) = pq + pr = (a^2 + a + k) + (b^2 + b + k) = (a + b)^2 + (a + b) + 2k - 2ab$.

Ще използваме, че $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{2} \geq 2ab \Rightarrow -\frac{(a+b)^2}{2} \leq -2ab$, т.е. $-2ab \geq -\frac{(a+b)^2}{2}$. По-точно $-2ab > -\frac{(a+b)^2}{2}$, защото в неравенството между средното аритметично и средното геометрично се достига до равенство само в случая $a = b$ (при нас $a > b$. Като продължим разсъждението от по-горе, стигаме до

$$2p^2 > (px-1)^2 + (px-1) + 2k - 2ab > (px-1)^2 + (px-1) + 2k - \frac{(a+b)^2}{2}$$

$$2p^2 > (px-1)^2 + (px-1) + 2k - \frac{(px-1)^2}{2} = \frac{(px)^2}{2} + 2k - \frac{1}{2} \text{ , т.е. } 2p^2 > \frac{(px)^2}{2} + 2k - \frac{1}{2} .$$

Оттук следва, че $x = 1$. В противен случай $x^2 \geq 4$ и

$$2p^2 > \frac{(px)^2}{2} + 2k - \frac{1}{2} \geq 2p^2 + 2k - \frac{1}{2} > 2p^2 \text{, т.е. } 2p^2 > 2p^2 ,$$

което очевидно е невъзможно.

Заключаваме, че $a + b + 1 = p$, откъдето

$$(a+b+1)q = pq = a^2 + a + k \text{ и } (a+b+1)r = pr = b^2 + b + k .$$

Тогава $a + b + 1$ дели $a^2 + a + k$ и $b^2 + b + k$, а следователно и техния сбор. Имаме

$$a+b+1 \mid a^2 + b^2 + a + b + 2k$$

$$a+b+1 \mid \left(a+b+1\right)^2 - (a^2 + b^2 + a + b + 2k) =$$

$$= a^2 + b^2 + 1 + 2ab + 2a + 2b - (a^2 + b^2 + a + b + 2k) = 1 + 2ab + a + b - 2k \text{ , т.е.}$$

$$a+b+1 \mid 2ab - 2k = 2(ab-k) .$$

Получаваме, че $a+b+1 \mid ab-k$. Нека $d = \frac{ab-k}{a+b+1}$. Имаме:

$$a - d = a - \frac{ab-k}{a+b+1} = \frac{a^2 + ab + a - ab + k}{a+b+1} = \frac{a^2 + a + k}{a+b+1} = q$$

и

$$b - d = b - \frac{ab-k}{a+b+1} = \frac{b^2 + ab + b - ab + k}{a+b+1} = \frac{b^2 + b + k}{a+b+1} = r .$$

Следователно

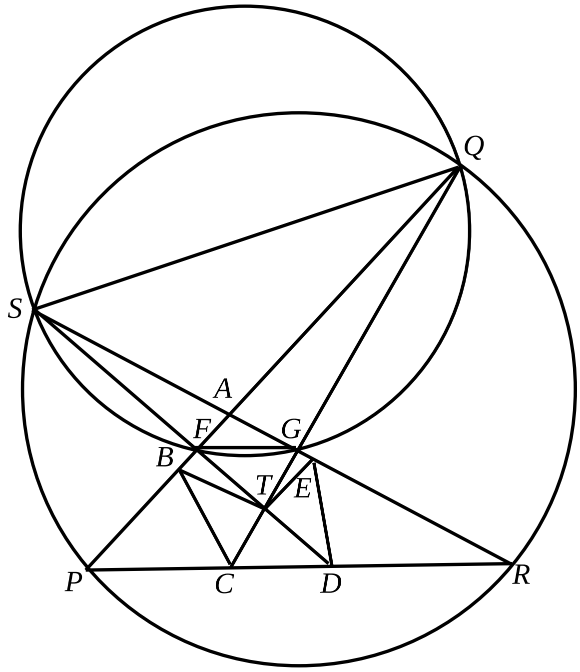
$qr = (a-d)(b-d) = (d-a)(d-b) = d^2 - (a+b)d + ab = d^2 - (p-1)d + pd + k = d^2 + d + k$,

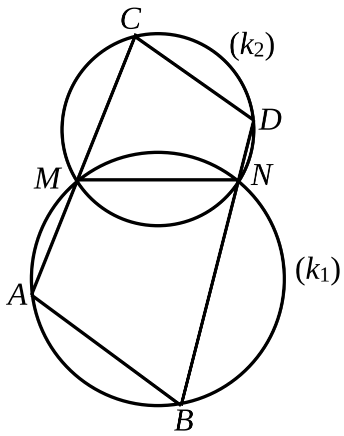
което трябваше да се докаже.

По-нататък ще използваме индукция по размера $|S|$ на *S*. Твърдението очевидно е изпълнено за $|S| = 2$. Да допуснем, че е изпълнено за $|S| = n$. Ще докажем, че е изпълнено за $|S| = n+1$. Ако към елементите на *S* в случая $|S| = n$ добавим по-голямо просто число *p*, то ще е разположено между две прости числа *q* и *r* при разполагане елементите на *S* , което изпълнява условието на задачата. От доказаното по-горе следва, че броят на решенията на уравнението $x^2 + x + k \equiv 0 \pmod{p}$ е точно 2 и следователно *q* и *r* са еднозначно определени. Това означава, че разположението на *p* е еднозначно определено и можем да използваме верността на твърдението за *n*. Така индуктивната стъпка е завършена.

Задача 4. От условието следва, че $\Delta BCT \cong \Delta DET$ по три страни. Тогава $\angle BTC = \angle DTE$ и $\angle BTF = \angle ETG$ като допълнителни към равните връхни ъгли $\angle CTF$ и

$\angle GTD$. Тъй като по условие $\angle ABT = \angle TEA$, заключаваме, че $\Delta BTF \sim \Delta ETG$. От подобието имаме $\frac{FT}{GT} = \frac{BT}{ET} = \frac{DT}{CT}$, т.е. $\frac{FT}{GT} = \frac{DT}{CT}$ и $\frac{FT}{DT} = \frac{GT}{CT}$. Оттук следва, че $\Delta FGT \sim \Delta CDT$, откъдето $FG \parallel DC$, т.е. $FG \parallel PR$. По нататък е достатъчно да се приложи една от теоремите на Рейм и по-точно теоремата, известна като Теорема 2 на Рейм. За теоремите на Рейм може да се прочете в статията „Д-р М. Плюс (2019). Международна олимпиада по математика'2019, *Математика плюс*, 3-4, 38-63".





Теорема 1 на Рейм. Нека окръжностите k_1 и k_2 се пресичат в точките *M* и *N*. Ако *A* и *B* са точки от k_1, а правите *AM* и *BN* пресичат за втори път k_2 съответно в точки C и D, то $AB \parallel CD$.

Теорема 2 на Рейм. Нека четириъгълникът *ABNM* е вписан в окръжност k_1. Ако точките C и D са съответно върху правите *AM* и *BN* така, че $AB \parallel CD$, то точките *M, N, D* и *C* лежат на една окръжност.

Теорема 3 на Рейм. Нека окръжностите k_1 и k_2 се пресичат в точките *M* и *N*. Ако *A* и *B* са точки от k_1, а правата *AM* пресича за втори път k_2 в точка C и *D* е точка върху k_2 така, че $AB \parallel CD$, то точките *B, N* и *D* лежат на една права.

Така, с помощта на Теорема 2 на Рейм заключаваме, че точките *P, S, Q* и *R* лежат на една окръжност.

Задача 5. Случай 1. $p = 2$. Ако $b \geq 3$, то $b!$ се дели на 3 и $b! + p \equiv 2 \pmod 3$. В същото време лявата страна се дели на 3 при $a \equiv 0 \pmod 3$ или $a^2 \equiv 1 \pmod 3$ по малката теорема на Ферма, когато a не се дели на 3. Остава да се проверят случаите $b = 1$ и $b = 2$. Първият очевидно не дава решение, а във втория от равенството $a^2 = 4$ получаваме $a = 2$. Така стигаме до решението на задачата $(a, b, p) = (2, 2, 2)$.

Случай 2. $p=3$. Ако $b\geq 7$, то $b!$ се дели на 7 и $b!+p\equiv 3\pmod 7$. В същото време възможните остатъци на a^3 при деление със 7 са 0, 1 и 6. Остава да се проверят случаите $b=1$, $b=2$, $b=3$, $b=4$, $b=5$ и $b=6$. Само при $b=4$ се получава решение и то е $(a,b,p)=(3,4,3)$.

Случай 3. $p\geq 5$.

Лема. Ако (a,b,p) е решение на задачата, то a не се дели на никое просто число $q<p$.

Доказателство: Да допуснем противното, т.е. $q\,|\,a$ за някое просто число $q<p$. Тогава q дели $a^p=b!+p$, откъдето следва, че q не дели $b!$. Следователно $b<q$. Имаме $a^p-p=b!\leq(q-1)!<q^{p-1}<q^p-p$, т.е. $a^p-p<q^p-p\Leftrightarrow a^p<q^p\Leftrightarrow a<q$. Последното е противоречие, защото от $q\,|\,a$ следва, че $a\geq q$. Използвахме, че $q^{p-1}<q^p-p$, т.е. че $q^p-q^{p-1}-p>0$, което следва например от факта, че функцията $f(p)=q^p-q^{p-1}-p$ е растяща. Наистина,

$$f(p+1)-f(p)=q^{p+1}-q^p-p-1-q^p+q^{p-1}+p=q^{p+1}-2q^p-1=q^p(q-2)-1>0,$$

което е очевидно при $q>2$.

Случай 3.1. Ако (a,b,p) е решение на задачата и p не дели a, то p не дели $b!$, откъдето $b<p$. Тогава

$$a^p-p=b!\leq(p-1)!<p^{p-1}<p^p-p\text{, т.е. } a^p-p<q^p-p\Leftrightarrow a^p<p^p\Leftrightarrow a<p.$$

Това противоречи на лемата, че (a,b,p) е решение на задачата. Следователно в този случай не получаваме решение. Използвахме, че $p^{p-1}<p^p-p$, което е еквивалентно с $p^{p-2}(p-1)>1$ и последното е очевидно.

Случай 3.2. Ако (a,b,p) е решение на задачата и p дели a, то $p^2\,|\,a^p$ и следователно p^2 не дели $b!$ (в противен случай ще излезе, че $p^2\,|\,p$. Имаме $b<2p$ и

$a^p-p=b!\leq(2p-1)!$. След групиране по двойки на множителите в $(2p-1)!$, разположени симетрично в двата края, получаваме:

$$a^p-p=b!\leq(2p-1)!=(1(2p-1))(2(2p-2))\ldots((p-1)(p+1))p<$$

$$<(p^2)(p^2)\ldots(p^2)p=p^{2p-1}<p^{2p}-p\text{, т.е.}$$

$$a^p-p<p^{2p}-p\Leftrightarrow a^p<p^{2p}\Leftrightarrow a<p^2.$$

Така заключаваме, че $a = p$. Използвахме, че $p^{2p-1} < p^{2p} - p$, което е еквивалентно с $p^{2p-2}(p-1) > 1$ и последното е очевидно.

От направените разсъждения следва, че остава да изследваме случая $a = p \geq 5$, $p < b \leq 2p-1$. Ако сега (a, b, p) е решение на задачата, то $b! = p^p - p$. Тъй като от $p < b \leq 2p-1$ следва $p+1 \mid b!$ и $\frac{p+1}{2} \mid b!$ ($p+1$ е четно число), то $2 \cdot \frac{p+1}{2} \cdot (p+1) \mid b!$. Ще докажем, че $2 \cdot \frac{p+1}{2} \cdot (p+1)$ не дели $p^p - p$, откъдето ще следва, че в разглеждания случай задачата няма решение. За целта да факторизираме израза $p^p - p$. Имаме

$$p^p - p = p(p^{p-1} - 1) = p(p^2 - 1)(p^{p-3} + p^{p-5} + p^{p-7} + \ldots + p^2 + 1).$$

Тъй като $p+1$ дели $p^2 - 1$, достатъчно е да покажем, че $p+1$ не дели $p^{p-3} + p^{p-5} + p^{p-7} + \ldots + p^2 + 1$. Всяко от събираемите в този сбор дава остатък 1 при деление на $p+1$. Наистина

$$\frac{p^2}{p+1} = \frac{p^2 - 1 + 1}{p+1} = \frac{p^2 - 1}{p+1} + \frac{1}{p+1} = \frac{(p-1)(p+1)}{p+1} + \frac{1}{p+1} = p - 1 + \frac{1}{p+1},$$

$$\frac{p^4}{p+1} = \frac{p^4 - 1 + 1}{p+1} = \frac{p^4 - 1}{p+1} + \frac{1}{p+1} = \frac{(p^2 - 1)(p^2 + 1)}{p+1} + \frac{1}{p+1} = (p-1)(p^2 + 1) + \frac{1}{p+1}$$

и т.н.

$$\frac{p^{p-3}}{p+1} = \frac{p^{p-3} - 1 + 1}{p+1} = \frac{p^{p-3} - 1}{p+1} + \frac{1}{p+1} = \frac{(p^2 - 1)(p^{p-5} + p^{p-7} + \ldots + p^2 + 1)}{p+1} + \frac{1}{p+1} =$$

$$= (p-1)(p^{p-5} + p^{p-7} + \ldots + p^2 + 1) + \frac{1}{p+1}.$$

Тъй като броят на събираемите в сбора $p^{p-3} + p^{p-5} + p^{p-7} + \ldots + p^2 + 1$ е $\frac{p-1}{2}$, то

$p^{p-3} + p^{p-5} + p^{p-7} + \ldots + p^2 + 1 \equiv \frac{p-1}{2} \neq 0 (\operatorname{mod}(p+1))$. Да обърнем внимание, че $p+1$ е четно число, както и числото $p-1$. Тогава

$$p^{p-3} + p^{p-5} + p^{p-7} + \ldots + p^2 + 1 \equiv \frac{p-1}{2} \neq 0 \left(\operatorname{mod} \frac{p+1}{2} \right)$$

Освен това $\frac{p-1}{2} < \frac{p+1}{2}$ и следователно $\frac{p+1}{2}$ дели $\frac{p-1}{2}(p^{p-3} + p^{p-5} + p^{p-7} + \ldots + p^2 + 1)$.

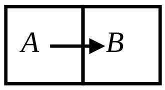
Окончателно задачата има две решения $(a, b, p) = (2, 2, 2)$ и $(a, b, p) = (3, 4, 3)$.

Задача 6. Примери на долини са клетките 1 и 3 в квадрата 3×3, както и клетката 2 в квадрата 5×5. Последователността 2-5-7-9-10 е пример на изкачване във втория квадрат, което може да се продължи до 2-5-7-9-10-14 или 2-5-7-9-10-14-25, или 2-5-7-9-10-12, или 2-5-7-9-10-12-17.

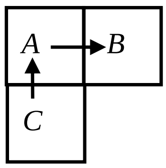
6	3	4
5	7	9
2	1	8

15	8	16	6	23
24	2	5	19	1
25	14	7	22	3
4	10	9	20	13
18	12	17	11	21

Ще докажем, че долната граница на броя на възможните изкачвания в един Северен квадрат $2n(n-1)+1$. За целта да забележим, че на всяка двойка съседни клетки (A, B) (A и B са числата в клетките) може да се съпостави изкачване. Това е така, защото ако без ограничение предположим, че $A < B$ и A е долина, то A-B е изкачване, което отбелязваме по следния начин:



Ако A не е долина, поне едно от числата в трите съседни клетки на A (четвъртата съседна е B) е по-малко от A (в противен случай A е долина). Нека без ограничение въпросната клетка е отдолу на A, т.е. имаме:



където $C < A$. Ако C е долина, получаваме изкачването C-A-B. В противен случай, както и по-горе, търсим съседна клетка на C с по-малко число, каквато със сигурност има. Продължаваме, докато стигнем до долина. Процесът е краен, защото редицата от числата в клетките е намаляваща и е ограничена отдолу. По този начин на различни двойки осъседни клетки се съпоставят различни изкачвания, защото всяко изкачване се характеризира с двете си крайни клетки. Разбира се, в общия случай една двойка съседни клетки може да води со различни изкачвания. Това може да се случи, ако например в случая по-горе, когато определяме клетката C, между съседните клетки па A да има и друга съседна с по-малко число. Последното наблюдение трябва да се използва при конструиране на пример с най-малко изкачвания. Тъй като търсим долна граница на броя на възможните изкачвания в един Северен квадрат, можем да считаме, че между множеството на двойките съседни клетки и множеството на възможните изкачвания в квадрата съществува взаимно еднозначно съответствие.

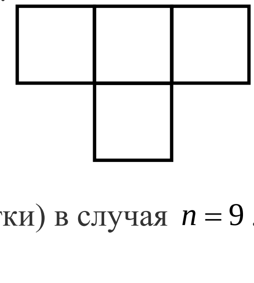
Ще преброим роя на съседните двойки клетки в един Северен квадрат. Движейки се хоризонтално по даден ред в квадрата отляво надясно, първата клетка най-вляво образува една двойка със следващата клетка в реда, втора клетка образува двойка с третата клетка в реда и т.н. Следователно в разглеждания ред има $n-1$ двойки съседни клетки. Редовете са общо n и заключаваме, че движейки хоризонтално двойките съседни клетки са $n(n-1)$. Движейки се вертикално, т.е. по стълбовете в квадрата, ще получим оше $n(n-1)$ двойки съседни клетки. Заключаваме, че броят на изкачванията, които завършват с двойки съседни клетки, е поне $2n(n-1)$. Към тях трябва да прибавим и единичните изкачвания, т.е. тези, които се състоят само от една клетка. Това са изкачванията, съставени само от по една долина. Клетката с числото 1 в нея е очевидно долина и следователно броят на долините в един Север квадрат е поне 1. Окончателно, долната граница на броя на възможните изкачвания в един Северен квадрат е $2n(n-1)+1$.

По-нататък ще дадем пример, в който тази долна граница се достига. Това е трудната част на задачата. При оценяване на писмените работи по време на олимпиадата се присъждаше само 1 точка за определяне на долната граница. Получаването на допълнителни точки ставаше в зависимост от правилните разсъждения и установяването на характеристики на търсената конструкция. Между тези характеристики е изискването конструкцията да има само една долина (клетката с числото 1 в нея); ако $A<B$ е двойка съседни клетки и A не е долина, то от A трябва да се стига до долина, т.е. до клетката 1, по единствен начин. Всичко това оформя идеята част от клетките, между които няма съседни, да се разглеждат като маркират, а останалите немаркирани клетки да образуват *дърво* на езика на графите с *корен* (начало) на дървото – клетката с числото 1 в нея. Ето един пример на такъв подход за квадрат 5×5, в който маркираните клетки са затъмнени:

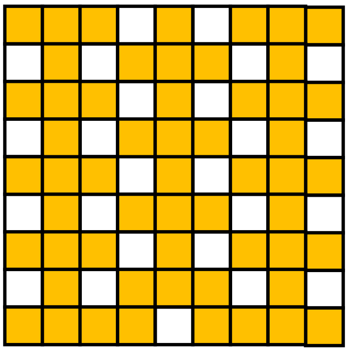
3	2	1	5	
	4		6	7
16		13		8
15	14	12	10	9
	17		11	

Стартът на номерирането може да е от произволна немаркирана клетка, в която се поставя 1 (т.е. номерира се с 1), и се продължава последователно с 2, 3 и т.н. при отиване в следваща немаркирана клетка до изчерпване на немаркираните. Останалите числа се поставят в маркираните клетки по произволен начин. Те всички са по-големи от числата в немаркираните клетки. При тази номерация немаркираните клетки образуват дърво. Това е така, защото с изключение на клетката 1 всяка от останалите е съседна точно на една клетка с по-малък номер. По този начин за всяка клетка, различна от клетката 1, се осигурява съществуването на точно едно изкачване, което завършва в тази клетка. На всяко изкачване можем да съпоставим последния ръб, който се използва в изкачването. Съпоставените ръбове са различни, защото последните използвани номера в изкачванията са различни. Последните ръбове принадлежат на маркирани клетки. Всеки от тях е общ ръб на маркирана и на немаркирана клетка, защото между маркираните клетки няма съседни. След като на всяка немаркирана клетка отговаря точно едно изкачване, което завършва в нея, изкачванията са общо $2n(n-1)+1$, към които е включено и единственото изкачване с дължина 1.

Самата конструкция е примерно следната. Най-напред конструираме дърво от групи клетки (четворки) с формата на буквата T, като всяка клетка извън дървото е съседна само на клетки от дървото.

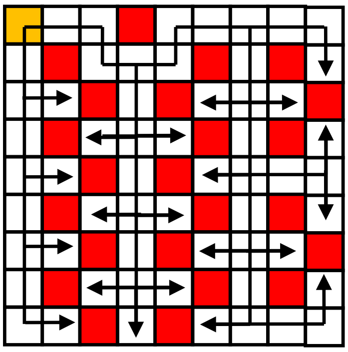


Показано е дърво (оцветените клетки) в случая $n=9$.



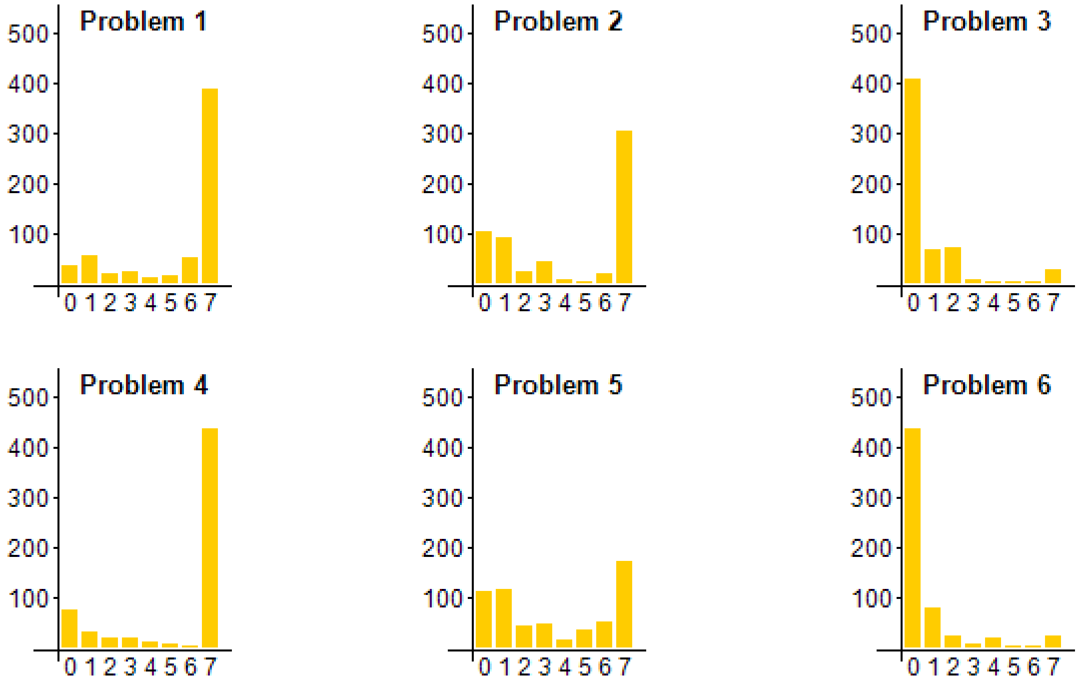
В най-левия правоъгълник 3×9 са разположени 4 групи T с късата част надолу, като последният ред е изцяло оцветен. По същия начин е оцветен и най-десният правоъгълник 3×9. Правоъгълникът 3×9 в средата е образуван от 4 групи T с късата част нагоре, а последният ред е оцветен по показания начин. При по голям размер на квадрата се увеличава броят на двата вида правоъгълници 3×9, които се редуват алтернативно. Ясно е, че такова оцветяване може да се направи за всеки Северен квадрат, размерът на който е кратен на 3. Ако размерът не е кратен на 3, съответният Северен квадрат се допълва до квадрат с кратен на 3 размер, в който се премахва най-левият стълб и евентуално най-десният. Премахва се също най-горният ред и евентуално най-долният. Нека броят на клетките в дървото е k. Числата от 1 до k се разполагат в дървото, както следва: числото 1 се поставя в произволна клетка от дървото. Алгоритъмът е най-ясен, ако числото 1 се постави в най-горната лява клетка. Всяко от останалите числа се поставя така, че да бъде съседно само на едно от вече поставените (може да се използва т. нар. Depth-first-search order, известен от програмирането, но на този алгоритъм няма са се спираме тук). Числата от $k+1$ до n^2 се поставят по произволен начин в оставащите клетки (неоцветените).

Ясно е, че оцветените клетки образуват дърво. То се състои от 56 клетки, на всяка от които отговаря едно изкачване, т.е. общо 56 изкачвания. Останалите клетки (неоцветените) са $81-56=25$. Те са два вида. Единият вид са от вътрешността е всяка клетка от този вид е съседна точно на 4 клетки от дървото. Броят им е 14 и следователно на тях отговарят $14.4=56$ изкачвания. Вторият вид неоцветени клетки са по периферията и техният брой е $25-14=11$. Всяка от тях е съседна точно на 3 клетки от дървото и на тях отговарят $11.3=33$ изкачвания. Получаваме, че всички изкачвания са $56+56+33=145$, което е точно $2n(n-1)+1$ при $n=9$.



Показан е още един пример за конструиране на Северен квадрат в случая $n=9$, в който клетката с номер 1 е в най-горния ляв ъгъл. Клетките извън дървото са оцветени, а редът за номериране на клетките от дървото, които не са оцветени, е посочен с помощта на стрелки. Тръгва се от клетката с номер 1.

Предлагаме официалната статистика за представянето на участниците в олимпиадата по всяка от шестте задачи от темата. Върху абсцисната ос са нанесени възможните резултати от 0 до 7 точки включително, а върху ординатната ос – броят на учениците със съответния точков резултат. Данните от графиките са уточнени в таблицата.



	Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**
среден брой точки	5,540	4,306	0,808	5,467	3,520	0,683
точки	**Задача 1**	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**
0	34	104	407	74	112	434
1	56	89	68	31	115	80
2	19	23	69	18	44	22
3	21	41	6	17	48	7
4	10	7	3	10	15	19
5	13	3	4	5	35	3
6	51	19	4	1	49	2
7	385	303	28	433	171	22
	589	**589**	**589**	**589**	**589**	**589**

Следващата 64. Международна олимпиада по математика ще се проведе от 2 до 13 юли 2023 г. в гр. Чиба, Япония.