

Национален кръг на “Европейско Кенгуру”

1 юни 2019 г.

ТЕМА за 9 – 10 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се запише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Даден е успоредник $ABCD$ с $AB = 6$, $BC = 3$ и $\sphericalangle BAD = 30^\circ$. Ортогоналните проекции на медицентъра G на $\triangle ABD$ върху правите AB , BC , CD и DA са съответно U , Q , V и P .

Сумата $\frac{1}{GP} + \frac{1}{GQ} + \frac{1}{GU} + \frac{1}{GV}$ е равна на:

- A) 4 B) 4,5 C) 5 D) 5,5 E) 6

2. Нека $f(x)$ е линейна функция, за която $f(0) \neq 0$ и $f(0)$ е единственият корен на уравнението $f(x \cdot f(x)) = 0$. Да се намери $f(2019)$.

- A) 1005 B) 1005,5 C) -1005,5 D) -1005 E) 2019

3. Каква е вероятността произволно избрано естествено число, по-малко от 2019, да има точно 9 делителя?

- A) $\frac{1}{2019}$ B) $\frac{1}{2018}$ C) $\frac{13}{2018}$ D) $\frac{7}{1009}$ E) $\frac{22}{1009}$

4. За кои стойности на параметъра m общите решения на неравенствата $|x\sqrt{2} - 1| \geq 2x - 3$ и $mx^2 + (1 - m)x - 1 < 0$ съдържат точно две прости числа?

- A) $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ B) $m \in (-3; +\infty)$ C) $m \in (-1; 0)$ D) $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ E) $m \in (-3; 0)$

5. Жури от трима души оценява изпълненията на десет ученици. Всеки член на журито подрежда учениците, но няма право да поставя повече от един ученик на едно и също място, като присъжда на първия, втория и т. н. на десетия съответно 1 точка, 2 точки и т. н. 10 точки. Участникът с най-малко общо събрани точки получава награда. Колко най-много ученици са получили награда?

- A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

6. Покрай пътя между два града са засадени едно след друго 2019 дървета – тополи и брези. Броят на дърветата между кои да е две тополи не е равен на 6. Колко най-много са тополите измежду тези 2019 дървета?

7. Дадена е редицата $\{a_n\}$, за която $a_1 = a_2 = 1$ и $a_{n+2} = a_n a_{n+1} + 1$ за $n \geq 1$. Да се докаже, че числото $a_n - 3$ е съставно за всяко $n > 6$.