Национален кръг на “Европейско Кенгуру”

1 юни 2019 г.

ТЕМА за 11 – 12 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат по 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Даден е равнобедрен трапец $ABCD$ с ъгъл $\sphericalangle AOB = 60^\circ$ (O е пресечната точка на диагоналите) и разлика 2 между дължините на основите. Да се намери лицето на трапеца, ако правата през средата на малката основа CD и успоредна на бедрото AD го разделя на две части, по-малката от които е с лице $3\sqrt{3}$.

A) $2(\sqrt{3}+2)$ **B)** $6\sqrt{3}$ **C)** $9\sqrt{3}$ **D)** $12\sqrt{3}$ **E)** $6(\sqrt{3}+2)$

2. В някои от полетата на дъска 13×5 е поставена по една пионка така, че всеки квадрат 2×2 на дъската съдържа поне 2 пионки. Колко най-малко пионки са поставени на дъската?

A) 22 **B)** 24 **C)** 26 **D)** 28 **E)** 32

3. Ако n е цяло число и уравнението $nx^3+(n+1)x^2-x-2=0$ има три различни цели корена, намерете сумата им.

A) -2 **B)** -1 **C)** 0 **D)** 1 **E)** 2

4. Окръжност се допира до страните AC и BC на ΔABC с $\sphericalangle ACB = 120^\circ$ и пресича страната AB последователно отляво надясно в точките M и N така, че $AM = 8$, $MN = 24$ и $NB = 3$. Намерете лицето на триъгълника.

A) $98\sqrt{3}$ **B)** $\dfrac{287\sqrt{3}}{3}$ **C)** $87\sqrt{3}$ **D)** $\dfrac{193\sqrt{3}}{3}$ **E)** $59\sqrt{3}$

5. Да се намери броят на двойките реални числа $(x;y)$, които са решения на системата:

$$\left|\begin{array}{l} y-x^6+1=0 \\ x^2+y^3-1=0 \end{array}\right. .$$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** повече от 4

6. Нека $a_1a_2...a_n$ е пермутация на числата от 1 до n $(n\geq 3)$. Ако $|a_i-a_{i-1}|=d_i$, $i=2,3,...,n$ и $d_2+d_3+...+d_n=D$, да се намери вероятността на $D\geq n+1$.

7. Нека n е нечетно число. Да се намери възможно най-големият брой числа (не задължително различни и цели), които могат да се подредят в редица така, че сумата на всеки n на брой последователни числа да е отрицателна, а сумата на всеки $n+2$ на брой последователни числа да е положителна.