

Международно състезание “Европейско Кенгуру”

17 март 2018 г.

ТЕМА за студенти

След всяка от първите 18 задачи има посочени по 5 отговора, от които само един е верен. Задачи с номера 19 и 20 изискват посочване на числов отговор. Всички задачи се оценяват с по 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 90 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Ако $A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 11 \end{vmatrix}$, то стойността на детерминантата на матрицата $3A$ е:

- A) 2 B) 54 C) 6 D) 34 E) -6

2. Намерете стойностите на x и y , за които матрицата $A = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ удовлетворява равенството $A^2 - xA + yE = O$, където E и O са съответно единичната и нулевата матрици.

- A) $x = 4, y = 0$ B) $x = 3, y = 0$ C) $x = 9, y = 14$ D) $x = 2, y = -8$ E) $x = 3, y = -4$

3. Дадена е матрицата $A = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$. Да се намери матрицата A^{2018} .

- A) $2^{2018} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ B) $2^{1008} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ C) $2^{2018} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$ D) $2^{1008} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ E) $2^{1008} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$

4. Обратната матрица на матрицата $A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ е:

- A) $\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{vmatrix}$ B) $\frac{1}{8} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ C) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ D) $\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{vmatrix}$ E) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

5. Дадени са матриците $A = \begin{vmatrix} 2 & a \\ a & 1 \end{vmatrix}$ и $B = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 3 & a \end{vmatrix}$. За кои стойности на реалния параметър a детерминантата $|A \cdot B|$ е равна на -2 ?

- A) 1 B) ± 1 C) ± 2 D) 1 и 2 E) ± 1 и ± 2

6. За кои стойности на реалния параметър a стойността на детерминантата $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix}$ е неотрицателна?

- A) $a \in (-\infty; +\infty)$ B) $a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ C) $a \in (-\infty; 1]$ D) $a \in (-1; 1)$ E) $a \in [-1; 1]$

7. Ако $(4x+7)^2 = ax^2 + bx + c$, където a , b и c са реални числа, намерете стойността на израза $a+b-c$.

- A) 16 B) 19 C) 23 D) 49 E) 56

8. Намерете полинома от втора степен $f(x)$, за който $f(x+1) = f(x) + x + 1$ за всяко x и $f(0) = 0$.

- A) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ B) $x^2 + x$ C) $x^2 - x$ D) $2x^2 + 2x$ E) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

9. Ъгловият коефициент на правата, която пресича координатните оси Ox и Oy на правоъгълна координатна система в равнината съответно в точките $(3;0)$ и $(0;5)$, е равен на:

- A) $-\frac{3}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $-\frac{5}{3}$ E) 3

10. Намерете координатите на точката, в която допирателната към графиката на функцията $f(x) = x^3 - 3x$ в точката $A(1; -2)$ пресича абсцисната ос Ox на правоъгълна координатна система в равнината.

- A) $(-2;0)$ B) $(1;0)$ C) $(0; -2)$ D) $(0;1)$ E) не пресича

11. Спрямо правоъгълна координатна система $Oxyz$ в пространството са дадени повърхнините $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и $2x^2 + y^2 = 2a^2$, където $a \neq 0$ е реално число. Намерете броя на общите точки на тези повърхнини.

- A) безброй много B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

12. Спрямо правоъгълна координатна система Oxy в равнината е дадена окръжността $x^2 - 6x + y^2 + 5 = 0$. Намерете координатите на нейния център.

- A) $(3;0)$ B) $(-3;0)$ C) $(3;2)$ D) $(-3;2)$ E) $(3;1)$

13. Спрямо правоъгълна координатна система Oxy в равнината са дадени правите $l_1: x + y - 2 = 0$ и $l_2: 2x - 3y + 1 = 0$, които се пресичат в точката B . Ако l_1 пресича абсцисната ос Ox в точката C , а l_2 пресича ординатната ос Oy в точката A , то лицето на четириъгълника $OABC$ е равно на:

- A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{7}{6}$ C) $\frac{1}{6}$ D) 1 E) 2

14. Спрямо правоъгълна координатна система Oxy в равнината е дадена окръжността $k: x^2 + y^2 = 1$. Правата, която се допира до k в точка от първи квадрант, пресича координатните оси в точки A и B . Намерете възможно най-малкото лице на $\triangle OAB$.

- A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 4 D) 2 E) $\sqrt{6}$

15. По колко начина могат да се подредят в редица един до друг три двойки съпруг и съпруга и още двама мъже при условие, че всяка жена трябва да е до съпруга си?

- A) 120 B) 240 C) $8 \cdot 8!$ D) 960 E) $8!$

16. Намерете границата $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(2x)}$.

- A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) $\frac{1}{4}$ D) 1 E) 4

17. Намерете стойността на интеграла $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\sin^4 x - 1 + \cos^2 x} dx$.

- A) -1 B) 1 C) 0 D) $-\infty$ E) $+\infty$

18. Ако $f(x, y) = ax^2 - (a+1)xy + 2ay^2$, за коя стойност на реалния параметър a дължината на $\text{grad } f$ в точката $(2; 1)$ е най-малка? Градиент на функцията $f(x, y)$ в точката $(x; y)$ е

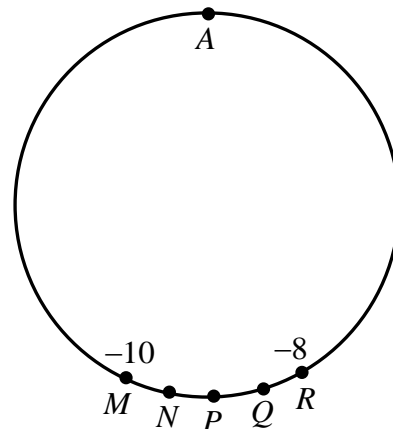
векторът с координати $\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}; \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)$.

- A) 2 B) $\frac{7}{13}$ C) $\frac{1}{13}$ D) $\frac{2}{13}$ E) $\frac{14}{13}$

За следващите две задачи посочете числов отговор.

19. Намерете дължината на интервала, в който се изменя разликата $a - b$ на четирицифрените числа $a = \overline{xuzt}$ и $b = \overline{tzux}$, за които $a \geq b$.

20. Във върховете на правилен 2018-ъгълник са записани числа, всяко от които е сбор на числата в двата съседни върха. Върховете A и P от чертежа са диаметрално противоположни, а върховете M, N, P, Q и R са последователни. Числата във върховете M и R са съответно -10 и -8 . Кое е числото във върха A ?



1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
B	C	E	D	E	E	C	E	D	E
11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
D	A	B	A	D	D	A	B	8802	8