Международно състезание “Европейско Кенгуру”

18 март 2017 г.

ТЕМА за студенти

Темата съдържа 20 задачи. След всяка задача има посочени 5 отговора, от които само един е верен. За даден верен отговор се присъждат 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици. ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 90 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Да се намерят векторите $\vec{a}(a_1,a_2)$ и $\vec{b}(b_1,b_2)$, ако $\vec{a}+\vec{b}=(3,5)$ и $\vec{a}-\vec{b}=(1,1)$.

A) $\vec{a}(2,3)$, $\vec{b}(1,2)$ **B)** $\vec{a}(3,1)$, $\vec{b}(0,4)$ **C)** $\vec{a}(-1,1)$, $\vec{b}(4,4)$ **D)** $\vec{a}(1,2)$, $\vec{b}(2,3)$ **E)** $\vec{a}(2,2)$, $\vec{b}(1,3)$

2. Дадени са точките $A(1,1)$, $B(5,5)$, $C(2,1)$ и $D(4,3)$. Точка M лежи на отсечката AB така, че дължината на CM е най-малка, а точка N лежи на отсечката CD така, че дължината на BN е най-голяма. Да се намери дължината на MN.

A) 1 **B)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C)** 3 **D)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **E)** $\sqrt{2}$

3. Да се намерят всички 2×2 матрици A, за които $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$.

A) $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-1&0\\-1&-1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-1&0\\-1&1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}$ **B)** $\begin{pmatrix}-1&0\\-1&-1\end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-1&0\\-1&-1\end{pmatrix}$ **D)** $\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-1&0\\-1&1\end{pmatrix}$ **E)** $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$

4. Да се намерят всички стойности на $n\in\mathrm{N}$, за които n^3+11n се дели на 6.

A) 1 **B)** Всяко $n\le 6$ **C)** 1, 2 и 3 **D)** Всяко $n\le 282$ **E)** Всяко $n\in\mathrm{N}$

5. Даден е ΔABC с върхове $A(1,2)$, $B(7,1)$ и $C(3,5)$. Ако P е периметърът, а S е лицето на ΔABC, то $P-1,5S$ е в интервала:

A) $(-1;0)$ **B)** $(0;0,2)$ **C)** $(0,2;0,8)$ **D)** $(0,8;1,2)$ **E)** $(1,2;1,6)$

6. За кои стойности на реалния параметър a уравнението $ax^3+ax^2+1=0$ има точно два различни реални корена?

A) $a<-\frac{27}{4}$ **B)** $a\in\left(-\frac{27}{4},0\right)\cup(0,+\infty)$ **C)** $a>0$ **D)** $a=-\frac{27}{4}$ **E)** $a<0$

7. Отсечка с дължина 2017 е разделена на три части. Да се намери най-малката възможна сума от квадратите на дължините на трите части.

A) $\frac{2017^2}{9}$ **B)** 2017^2 **C)** $\frac{2017^3}{2}$ **D)** $\frac{2017^2}{3}$ **E)** 6051

8. В ΔABC $AB=5$, $BC=4$, $AC=x$. Ако CH е височина в триъгълника ($H\in AB$), за кои стойности на x е изпълнено $AH>BH$?

A) $x\in(4,+\infty)$ **B)** $x\in(0,4)$ **C)** $x\in(4,9)$ **D)** $x\in(1,+\infty)$ **E)** $x\in(1,4)$

9. $P(x)$ е полином от шеста степен със старши коефициент 1 и има шест реални нули, образуващи геометрична прогресия. Ако 1 е най-малката нула на $P(x)$ и $P(0)=32768$, да се намери сумата от шестте му нули.

A) 63 **B)** 364 **C)** 32768 **D)** 225 **E)** 81

10. Да се намери броят на всички наредени двойки естествени числа (m,n) ($m,n \le 100$), които удовлетворяват равенството $n^2-25m-50=0$.

A) 4 **B)** 16 **C)** 19 **D)** 81 **E)** 9

11. Да се пресметне границата $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt{3x}}-1}{\sqrt{6\sin x}}$.

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C)** 0 **D)** ∞ **E)** $\frac{1}{4}$

12. Нека m и n са едноцифрени естествени числа, а $k(m)$ и $k(n)$ са остатъците им при деление на 6. Да се намери броят на всички наредени двойки (m,n), за които $k(m).k(n)=4$.

A) 6 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 3 **E)** 8

13. Да се намерят координатите (x,y) на точка A, лежаща на окръжността k с център $O(0,0)$ и радиус 1, за която функцията $f(x,y)=3y^4+4x^2+1$ има най-голяма стойност.

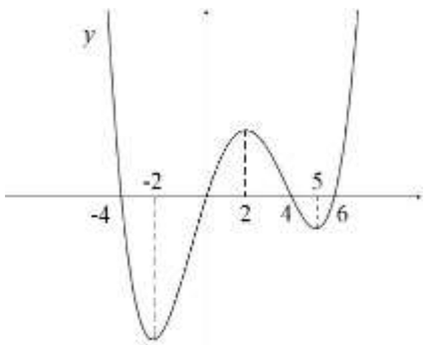
A) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ **B)** $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ или $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **C)** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

D) $(0,1)$ или $(0,-1)$ **E)** $(1,0)$ или $(-1,0)$

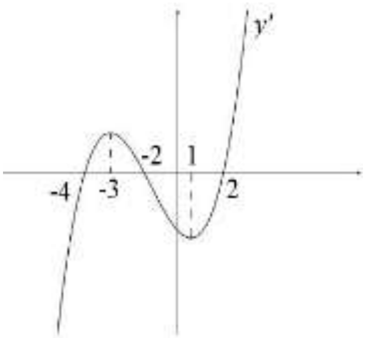
14. Да се намери броят на всички естествени числа в интервала [2017,2117], сумата от цифрите на които може да се представи като произведение на две различни прости числа.

A) 22 **B)** 36 **C)** 16 **D)** 50 **E)** 28

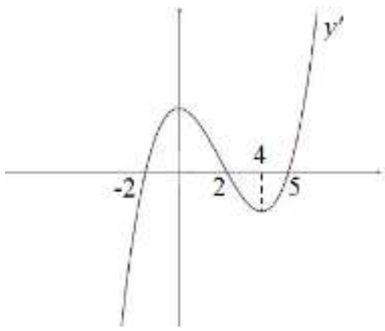
15. Функцията $y=f(x)$ е дефинирана и има непрекъсната производна за всяко $x\in(-\infty,\infty)$. На фигурата е дадена нейната графика. Коя от фигурите по-долу представя графиката на производната ѝ y'?



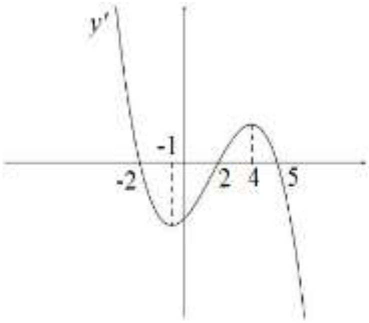
A)

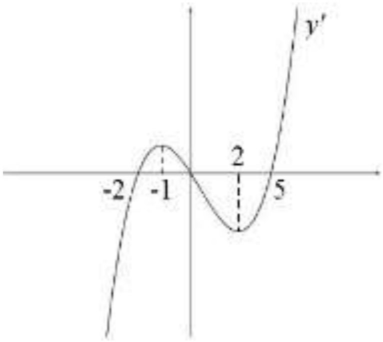


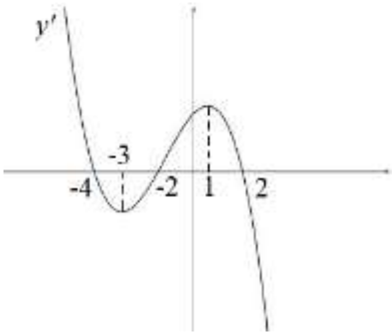
B)



C)



D) 

E) 

16. Да се реши интегралът $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+2x^2+5}}$.

A) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1+\sqrt{x^4+2x^2+5}\right)+C$ **B)** $2\sqrt{x^4+2x^2+5}+C$ **C)** $\arcsin(x^4+2x^2+5)+C$

D) $\frac{x^2}{\left(x^4+2x^2+5\right)^{\frac{3}{2}}}+C$ **E)** $\ln\left|x\sqrt{x^4+2x^2+5}\right|+C$

17. Дадени са парабола $\pi: y=x^2+2$ и елипса $\varepsilon: \frac{x^2}{4}+y^2=1$. Ако точка L е върхът на параболата π, а точка K лежи на елипсата ε, то максималната дължина на отсечката KL е:

A) 3 **B)** $2\sqrt{2}$ **C)** $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ **D)** $2\sqrt{6}$ **E)** 4

18. Да се намери броят на всички различни 1009-орки естествени числа от интервала $[1,2017]$, чиято сума е равна на 1526615.

A) 1009 **B)** 2017 **C)** 2017^{1009} **D)** 2 **E)** 3

19. За кои стойности на реалния параметър a матрицата $A=\begin{Vmatrix}1 & a & 1 & 1\\ a & 2 & 1 & -1\\ 4 & a & a & a\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{Vmatrix}$ е обратима?

A) $a=0$ и $a=4$ **B)** $a\in(-\infty,+\infty)$ **C)** $a\in(-\infty,0)\cup(0,4)\cup(4,+\infty)$

D) $a\in(-4,4)$ **E)** $a=0$

20. В окръжността $k: x^2+y^2=1$ е вписан четириъгълник $ABCD$, диагоналите AC и BD на който се пресичат в точка L. Да се намерят координатите на върховете B, C и D, ако $A(-1,0)$ и произведението от лицата на ΔALB и ΔCLD е равно на $\frac{1}{4}$.

A) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $(1,0)$ **B)** $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $(1,0)$

C) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $(1,0)$ **D)** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $(1,0)$

E) $(0,-1)$, $(1,0)$, $(0,1)$